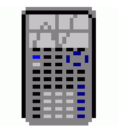
Expression générale de la tension u aux bornes du condensateur

$u(t) = U_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\tau = \dfrac{2L}{R+r}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

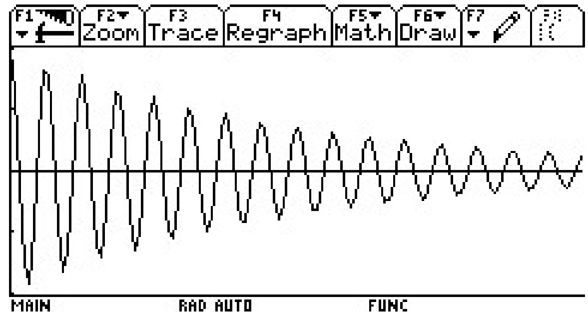
numériquement : $u = 2e^{-20t}\cos(1000t)$ avec $R + r = 40\ \Omega$

$L = 1{,}0$ H ; $C = 1{,}0\ \mu$F ; $T_0 = 6{,}3$ ms ; $\omega_0 = 1000$ rad·s^{-1}.



Sur la calculatrice : Y = 2*e^(20*x)*cos(1000*x)

Window : xmin = 0 ; xmax = 0,1 ; Ymin = –2 ; Ymax = 2



Forme des solutions de l'équation du circuit

Équation du circuit

$$L\frac{d^2u}{dt^2} + R\frac{du}{dt} + \frac{u}{C} = 0$$

Rem : R est ici la somme des résistances du circuit.

Solution

La solution cherchée de cette équation est de la forme $u(t) = A\exp(\alpha.t)$

Avec $\dfrac{du}{dt} = \alpha\, A\exp(\alpha.t)$ et $\dfrac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2\, A\exp(\alpha.t)$

D'où « l'équation caractéristique » $L\alpha^2 + R\alpha + 1/C = 0$ associée à l'équation différentielle dont les solutions α_1 et α_2 conduisent à la solution générale $u(t) = A_1\exp(\alpha_1 t) + A_2\exp(\alpha_2 t)$.

Rem : les constantes A_1 et A_2 sont déterminées par les conditions initiales : $u(0)$ et $i(0)$.

Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = \sqrt{R^2 - 4L/C}$.

Discussion

1er cas : $\Delta < 0$ soit R faible $\alpha_{1,2} = -\dfrac{R}{2L} \pm i\dfrac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}$

(Racines complexes : un terme réel et un terme imaginaire (sinus))

Le premier terme $-R/2L$ est un terme d'amortissement, on pose $\lambda = R/2L$.

Le deuxième terme est proche de $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ car $R^2 \ll 4L/C$, on pose $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

La solution est donc de la forme $u(t) = U_0.e^{-\lambda t}.\cos(\omega t)$ soit $u(t) = U_0.e^{-\lambda t}.\cos(\dfrac{2\pi}{T}t)$.

Le régime est pseudo-périodique de période T proche de T_0.

2ème cas $\Delta = 0$ alors $R = R_c$: la résistance critique est de valeur $R_c = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

La solution est alors de la forme $u(t) = (At + B).e^{-\lambda t}$.

Le régime est dit critique ; il n'y a plus d'oscillations.

3ème cas $\Delta > 0$ pour R importante

Les solutions de l'équation caractéristiques sont réelles, elles correspondent à des exponentielles décroissantes, le régime est donc apériodique.